

第2讲 圆周角定理及应用

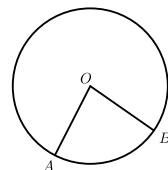
一、弧、弦、圆心角关系

1. 圆心角定义：顶点在 圆心，并且两边都和圆 相 的角叫做圆心角。

！注意：(1) 1° 的弧：将整个圆分为360等份，每一份的弧对应 1° 的圆心角，也称这样的弧为 1° 的弧。

(2) 圆心角的度数和它所对的 弧 的度数相等。

如图： $\widehat{AB}$ 的度数 = $\angle AOB$

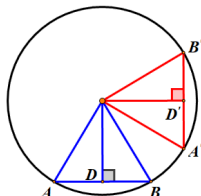


2. 弧、弦、圆心角关系

①在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的 弧 相等，所对的 弦 也相等。

②在同圆或等圆中，如果两条弧相等，那么它们所对的 圆心角 相等，所对的 弦 相等。

③在同圆或等圆中，如果两条弦相等，那么它们所对的 圆心角 相等，所对的 优弧 和 劣弧 分别相等



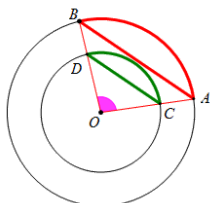
【备注】1、在同圆或等圆中，圆心角等 $\Leftrightarrow$ 弧等 $\Leftrightarrow$ 弦等 $\Leftrightarrow$ 弦心距等。

2、在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，弦心距也相等，即 $OD = OD'$

3、由圆心角等 $\Leftrightarrow$ 弧等 $\Leftrightarrow$ 弦等的大前提是在 同圆或等圆 中。

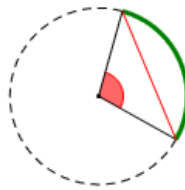
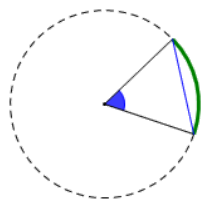
4、因为一条弦对的弧有两条，所以由弦等得出弧等时，这里的弧等指的是弦对的劣弧与劣弧对应相等，优弧与优弧对应相等。

！注意：(1) 不是同圆或等圆时，圆心角的度数相等，那么所对的弧和弦不相等。



(2) 不是同圆或等圆时，两条弧的长度相等，那么所对的弦长和圆心角不相等。

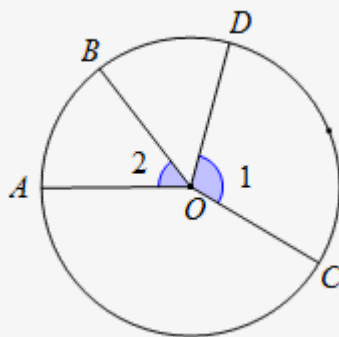
(如图，绿色部分的弧长相等，但在不同大小的两个圆里，很显然圆心角和弦长大小不相等。)



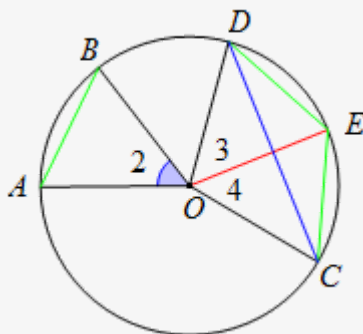
(3) 不是同圆或等圆时，两条弦的长度相等，那么所对的弧长和圆心角不相等。

思考：如果在同圆或等圆中，一个圆心角的度数是另一个圆心角度数的2倍，那么大圆心角所对的弧长和弦长是小圆心角所对弧长和弦长的2倍吗？试着证明一下。

【备注】 1、先按照题意画出图形， $\angle 1 = 2\angle 2$ ，如图：



2、作 $\widehat{CD}$ 的中点E，连接OE。



所以， $\angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ ，

所以弦 $AB = DE = CE$ ， $\widehat{AB} = \widehat{DE} = \widehat{CE}$ ，

在 $\triangle DCE$ 中， $DE + CE > DC$ 。

所以，在同圆或等圆中，一个圆心角是另一个圆心角的2倍时，大的圆心角所对的弧是小圆心角所对弧长的2倍，但弦长不满足2倍的关系。

举个“栗”子

栗子1

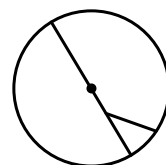
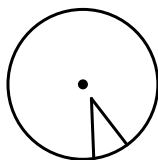
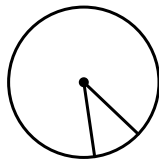
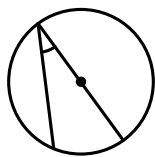
1. 下列图形中的角是圆心角的是（ ）。

A.

B.

C.

D.



【备注】 圆心角的判定：顶点在圆心，两边和圆相交

【答案】 B

【解析】 A 选项：不是

圆心角；

B 选项：是圆

心角；

C 选项：不是

圆心角；

D 选项：不

是圆心角。

故选 B。

【标注】 【知识点】 圆心角和圆周角

栗子2

2. 下列说法中，正确的是（ ）。

A. 等弦所对的弧相等

B. 相等的圆心角所对的弧相等

C. 平分弦的直径垂直于弦

D. 等弧所对的圆心角相等

【答案】 D

【解析】 A. 等弦所对的弧有优弧，劣弧之分。

B. 必须在“同圆或等圆”中。

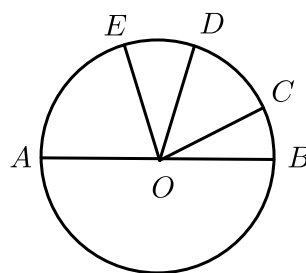
C. 平分弦（不是直径）的直径垂直于弦。

【标注】 【知识点】 弧、弦、圆心角关系

栗子3

3.

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弧 $BC = \text{弧}CD = \text{弧}DE$ ， $\angle AOE = 72^\circ$ ，则 $\angle COD$ 的大小= _____（度）。



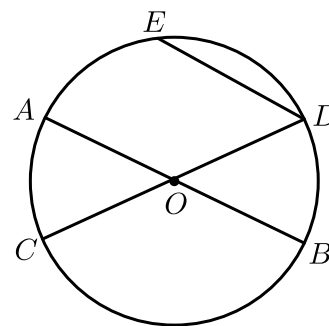
【备注】弧等 $\Rightarrow$ 圆心角等

【答案】 36°

【解析】 $\because \text{弧}BC = \text{弧}CD = \text{弧}DE$ ， $\angle AOE = 72^\circ$ ，
 $\therefore \angle BOC = \angle COD = \angle DOE$ ，
 $\therefore \angle BOC = 36^\circ = \angle COD = \angle DOE$ 。

【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

4. 如图， AB 和 CD 是 $\odot O$ 的两条直径，弦 $DE \parallel AB$ ，弧 DE 为 50° （所对圆心角为 50° ）的弧，那么 $\angle BOC$ 为（ ）



A. 115°

B. 100°

C. 80°

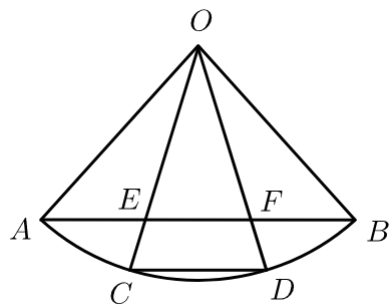
D. 50°

【备注】 $\because \text{弧}DE$ 的度数为 50° ， $\therefore \angle DOE = 50^\circ$ ，
 由 $\triangle DOE$ 为等腰三角形得 $\angle EDO = 65^\circ$ ，
 $\because DE \parallel AB$ ， $\therefore \angle EDO = \angle AOC = 65^\circ$ ，
 $\therefore \angle BOC = 115^\circ$

【答案】A

【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

5. 如图，扇形 OAB 的圆心角为 90° ，点 C, D 是弧 AB 的三等分点，半径 OC, OD 分别与弦 AB 交于点 E, F ，下列说法错误的是（ ）。



- A. $AE = EF = FB$ B. $AC = CD = DB$ C. $EC = FD$ D. $\angle DFB = 75^\circ$

【备注】 利用弧、弦、圆心角的关系与全等三角形综合进行判定

【答案】 A

【解析】 $\because$ 点 C, D 是弧 AB 的三等分点，

$\therefore AC = CD = DB$ ，故B正确；

$\because OA = OB$ ， $\angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle AOC = \angle BOD = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle OEF = \angle OAB + \angle AOC = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$ ，

同理 $\angle OFE = 75^\circ$ ，

$\therefore OE = OF$ ，

$\because OC = OD$ ，

$\therefore CE = FD$ ，

故C正确；

连接 AC, BD ，

$\because$ 由选项C知， $OC = OD$ ，

$OE = OF$ ，

$\therefore EF \parallel CD$ ，

$\therefore EF < CD$ ，

$\therefore AC = CD = BD$ ，

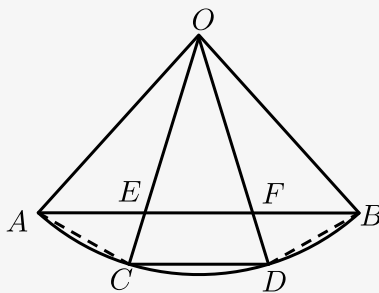
$\angle AOC = \angle COD$ ， $OA = OC = OD$ ，

$\therefore \triangle ACO \cong \triangle DCO$ ，

$\therefore \angle ACO = \angle OCD$ 。

$\therefore \angle OEF = \angle OAE + \angle AOE = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$ ，

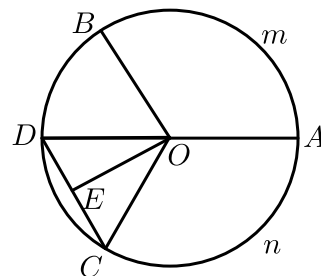
故D正确； $\angle OCD = 75^\circ$ ，



$\therefore \angle OEF = \angle OCD$,
 $\therefore CD \parallel AB$,
 $\therefore \angle AEC = \angle OCD$,
 $\therefore \angle ACO = \angle AEC$.
 故 $AC = AE$, 同理 , $BF = BD$.
 又 $\therefore AC = CD = BD$,
 $\therefore CD = AE = BF \neq EF$, 故A错误 ;
 故选A .

【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

6. 如图, AD 是 $\odot O$ 的直径, 且 $AD = 6$, 点 B 、 C 在 $\odot O$ 上, $\widehat{AmB} = \widehat{AnC}$, $\angle AOB = 120^\circ$, 点 E 是线段 CD 的中点, 则 $OE = (\quad)$.



- A. 1 B. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ C. 3 D. $2\sqrt{3}$

【备注】弦、弧、圆心角关系与垂径定理结合

E 为 DC 中点, 可得 $OE \perp DC$,
 $\triangle ODC$ 为等腰三角形, 由三线合一可得 $\angle DOE = \angle COE$ (或延长 OE 交 $\odot O$ 于点 F , 可得 $\widehat{DF} = \widehat{CF}$, 即 $\angle DOF = \angle COF$)

【答案】 B

【解析】 $\therefore \widehat{AmB} = \widehat{AnC}$, $\angle AOB = 120^\circ$, AD 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle AOC = \angle AOB = 120^\circ ,$$

$$\therefore \angle COD = \angle BOD = 60^\circ .$$

$$\therefore OD = OC ,$$

$\therefore \triangle COD$ 是等边三角形 .

$$\therefore AD = 6 ,$$

$$\therefore OD = 3 .$$

$\therefore$ 点 E 是线段 CD 的中点,

$$\therefore OE \perp CD , \angle COE = 30^\circ .$$

又：在 $\text{Rt}\triangle COE$ 中， $OC = 3$ ，

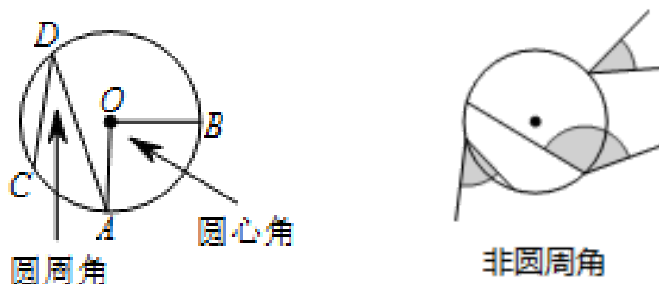
$$\therefore CE = \frac{3}{2}, OE = \sqrt{OC^2 - CE^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

故选B.

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

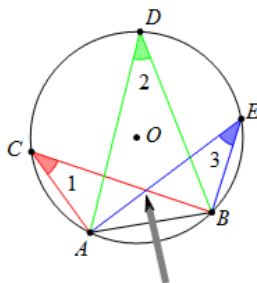
二、圆周角定理

1. 圆周角定义：顶点在 圆，并且两边都和圆 相交 的角叫做圆周角。

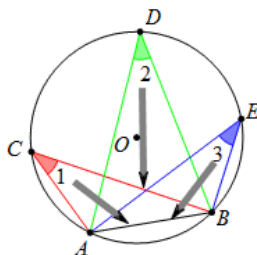


！注意识别弧与弦所对的圆周角：

(1) 因为点 C 、 D 、 E 三点都在圆周上，且角的两边都和圆相交，所以，红 $\angle 1$ 、绿 $\angle 2$ 、蓝 $\angle 3$ 三个角都是圆周角。从箭头的方向看过去，红 $\angle 1$ 、绿 $\angle 2$ 、蓝 $\angle 3$ 都是 $\widehat{AB}$ 、弦 AB 所对的圆周角。

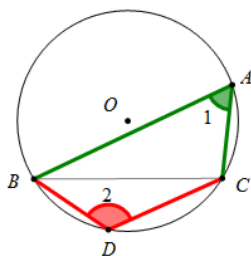


(2) 从下图箭头的方向看过去， $\widehat{AB}$ 、弦 AB 是红 $\angle 1$ 、绿 $\angle 2$ 、蓝 $\angle 3$ 三个圆周角所对的弧和弦。



(3) 一条弧可以对应多个圆周角，如上图；一条弦也对应多个圆周角，但是这多个圆周角要分两个情况进行讨论，如下图。点 A 在优弧 $\widehat{CAB}$ 上动，可以取无数个位置，点 D 在劣弧 $\widehat{CB}$ 上动，也可以取

无数个位置．



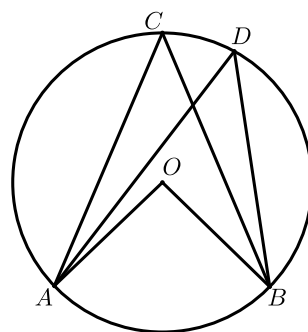
【备注】 弧所对的圆周角只考虑一种情况，但弦所对的圆周角要考虑两种情况．弧和弦所对的圆心角只有一种情况，因为圆心是唯一确定的．

2. 圆周角定理

圆周角定理：在 同圆 或 等圆 中，同弧 或 等弧 所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半．

如图：

$$\angle ACB = \angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB$$



【备注】 **！** 注意：在应用定理时，一定要保证“同弧或等弧”的前提．

🧠 圆周角定理的证明

已知：在 $\odot O$ 中， $\widehat{BC}$ 所对的圆周角是 $\angle BAC$ ，圆心角是 $\angle BOC$ ．

求证： $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$ ．

证明：由圆周角在圆内的位置关系，分三种情况讨论．

(1) 圆心 O 在 $\angle BAC$ 的一条边上 (如图1)，

$$\because OA = OC, \therefore \angle C = \angle BAC,$$

$$\because \angle BOC = \angle BAC + \angle C,$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC.$$

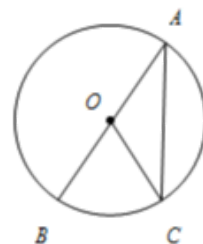


图1

(2) 圆心 O 在 $\angle BAC$ 的内部，(如图2)，作 直径AD，由(1)得出结论得：

$$\because \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD, \angle DAC = \frac{1}{2} \angle DOC,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle DAC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle DOC),$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC.$$

(3) 圆心 O 在 $\angle BAC$ 的外部, (如图3), 作 直径 AD , 由 (1) 得出结论得:

$$\therefore \angle DAB = \frac{1}{2}\angle DOB, \angle DAC = \frac{1}{2}\angle DOC,$$

$$\therefore \angle DAC - \angle DAB = \frac{1}{2} - (\angle DOC - \angle DOB).$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC.$$

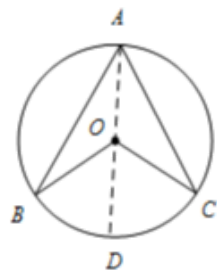


图2

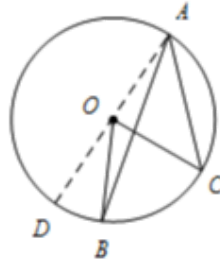


图3

【备注】 这部分可以引导学生自己先试试能不能证明出圆周角定理, 本质上就是证明上述三个图形中的圆周角 $\angle ACB$ 是等于 $\widehat{AB}$ 所对圆心角的一半. 可以提示学生需要先做辅助线构造出圆心角, 在证明 $\widehat{AB}$ 所对圆心角和圆周角的关系.

🗨 圆周角定理的推论

推论1: 同弧 或 等弧 所对的圆周角相等.

! 注意:

不能把 “同弧或等弧” 改成 “同弦或等弦”, 因为一条弦所对的圆周角有 两 种情况. 一般情况下不相等, 如图2.

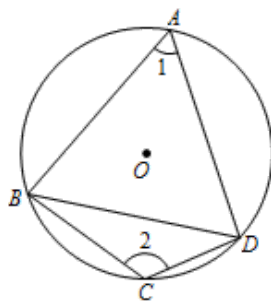


图2

【备注】 拓展: 在同圆或等圆中, 如果两个圆周角相等, 它们所对的弧一定相等.

【注意】

“相等的圆周角所对的弧也相等” 这一结论的前提条件是 “在同圆或等圆中”, 离开这一前提条件, 结论不成立. 如图3.

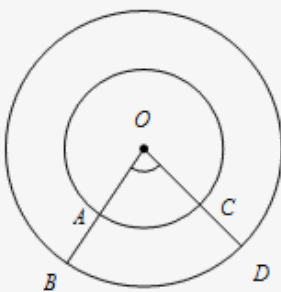


图3

推论2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角， 90° 的圆周角所对的弦是直径。

！注意：

一般情况下，当条件中有直径时，往往做出直径所对的圆周角，从而得到直角三角形。

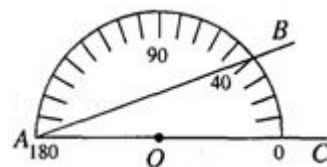
【备注】目前圆心角定理和圆周角定理我们都学习完了，圆中出现了角，首先就要寻找所对的弧，从弧入手去寻找其它角度的关系；见到直径考虑 90° 或构造直角。

🧐 举个“栗”子

栗子4

🧐 量角器读数

7. 如图，一个量角器放在 $\angle BAC$ 的上面，则 $\angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}$ 度。



【备注】量角器读数：量角器量的是圆心角的度数

【答案】 20

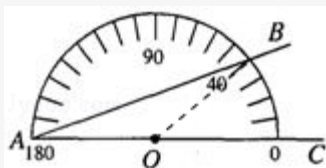
【解析】 连接OB，

由题意，

得：

$$\angle BOC = 40^\circ,$$

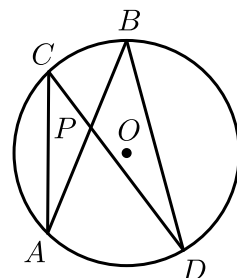
$$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 20^\circ.$$



【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

同弧或等弧所对圆周角关系

8. 如图， $\odot O$ 中，弦 AB 、 CD 相交于点 P ，若 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle APD = 70^\circ$ ，则 $\angle B$ 等于（ ）。



A. 30°

B. 35°

C. 40°

D. 50°

【备注】同弧所对的圆周角相等

【答案】C

【解析】方法一：同弧所对的圆周角相等，

$$\therefore \angle D = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BPD = 180^\circ - \angle APD = 110^\circ,$$

$$\text{在} \triangle BPD \text{中}, \angle B = 180^\circ - \angle BPD - \angle D = 40^\circ.$$

故选C.

方法二： $\because \angle A = 30^\circ$ ， $\angle APD = 70^\circ$ ，

$$\therefore \angle C = \angle APD - \angle A = 40^\circ,$$

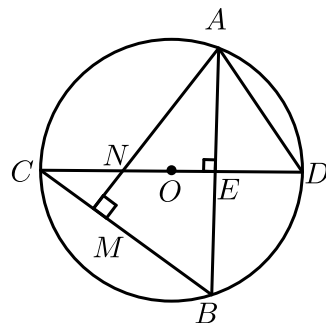
$\because \angle B$ 与 $\angle C$ 是 $\widehat{AD}$ 对的圆周角，

$$\therefore \angle B = \angle C = 40^\circ.$$

故选C.

【标注】【知识点】圆周角定理的推论

9. 如图， $\odot O$ 中，直径 $CD \perp$ 弦 AB 于 E ， $AM \perp BC$ 于 M ，交 CD 于 N ，连接 AD 。



(2) 若 $AB = 8$, $ON = 1$, 求 $\odot O$ 的半径.

(2) 由(1)可得, $\triangle ANE$ 为等腰三角形, 利用 “三线合一” 的性质可得 $NE = DE$, 接下来利用垂径定理中的方程思想求解即可

$$(2) \frac{13}{3}.$$
$$\therefore AN = AD .$$

故答案为： $\frac{13}{3}$.

【知识点】圆周角定理以及应用

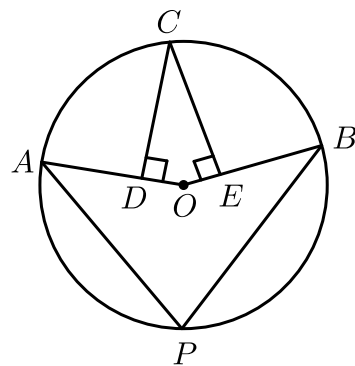
【知识点】弧、弦、圆心角关系

【能力】推理论证能力

栗子6

同弧或等弧所对圆周角与圆心角关系

10. 如图, 点 A, B, C, P 在 $\odot O$ 上, $CD \perp OA$, $CE \perp OB$, 垂足分别为 D, E , $\angle DCE = 40^\circ$, 则 $\angle P$ 的度数为().



- A. 140° B. 70° C. 60° D. 40°

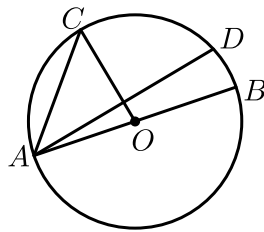
【备注】易得 $\angle P$ 所对的弧为 $\widehat{AB}$, 因此 $\angle P = \frac{1}{2} \angle AOB$

【答案】B

【解析】 $\because CD \perp OA, CE \perp OB$, 垂足分别为 D, E , $\angle DCE = 40^\circ$,
 $\therefore \angle DOE = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$,
 $\therefore \angle P = \frac{1}{2} \angle DOE = 70^\circ$.

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

11. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, C, D 为 $\odot O$ 上的两点, 且 C 为 $\widehat{AD}$ 的中点, 若 $\angle BAD = 20^\circ$, 则 $\angle ACO$ 的度数为().



- A. 30° B. 45° C. 55° D. 60°

【备注】圆中两条半径组成的三角形为等腰三角形，求解顶角即可得到答案；顶角为圆心角，依旧从弧入手寻找角之间的关系

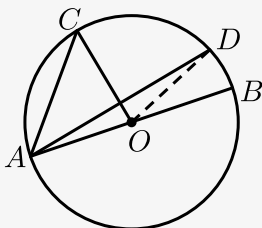
由 $\angle BAD$ 所对的弧为 $\widehat{BD}$ ，可得 $\angle DOB = 2\angle DAB$ ；

由 C 为 $\widehat{AD}$ 的中点，得 $\angle AOC = \angle COD$ ；

由 $\triangle ACO$ 为等腰三角形即可得到 $\angle ACO$ 的度数

【答案】 C

【解析】 连接 OD ，



$$\therefore \angle BOD = 2\angle BAD = 2 \times 20^\circ = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 180^\circ - \angle BOD = 140^\circ,$$

$\because C$ 是 $\widehat{AD}$ 中点，

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{CD},$$

$$\therefore \angle AOC = \angle COD,$$

$$\therefore \angle AOC + \angle COD = \angle AOD = 140^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 70^\circ,$$

$$\because OC = OA,$$

$$\therefore \angle ACO = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ.$$

故选C.

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

12. 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 50^\circ$ ，弦 $BD \perp AC$ ， E 为垂足．

(1) 如图1，连接 AD ，求 $\angle CAD$ 的度数．

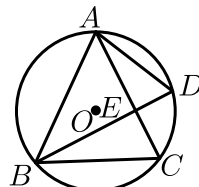


图 1

【备注】

$\angle CAD$ 所对的弧为 $\widehat{CD}$ ，可得 $\angle CAD = \angle CBD$

【答案】(1) 25° .

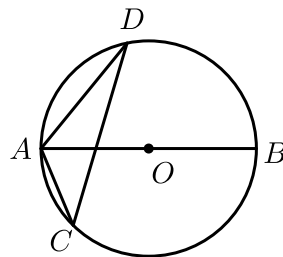
【解析】(1) $\because AB = AC, \angle BAC = 50^\circ$,
 $\therefore \angle ABC = \angle C = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$,
 $\because BD \perp AC$,
 $\therefore \angle BEC = 90^\circ, \angle CBE = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$,
 $\therefore \angle CAD = \angle CBD = 25^\circ$.

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

栗子7

💡 直径所对圆周角为直角

13. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 是 $\odot O$ 的弦, $\angle ACD = 30^\circ$, 则 $\angle BAD$ 为().



A. 30°

B. 50°

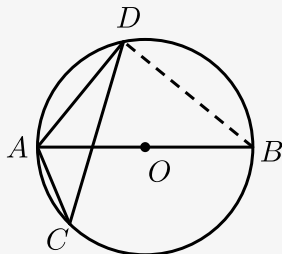
C. 60°

D. 70°

【备注】见到直径想直角, 连接 BD 即可得到 $\angle ADB = 90^\circ$;
圆中求角找角所对的弧, 可得 $\angle ACD = \angle ABD$

【答案】C

【解析】方法一: 连接 BD ,



$\because \angle ACD = 30^\circ$,

$\therefore \angle ABD = 30^\circ$,

$\because AB$ 为直径,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ - \angle ABD = 60^\circ .$$

故选：C .

方法二： $\because \angle ACD$ 与 $\angle AOD$ 为 $\widehat{AD}$ 所对的圆周角和圆心角，

$$\therefore \angle AOD = 2\angle ACD .$$

$$\because \angle ACD = 30^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOD = 2 \times 30^\circ = 60^\circ .$$

$$\because OA = OD ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ODA ,$$

$$\therefore \angle BAD = \frac{180^\circ - \angle AOD}{2} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ .$$

故选：C .

方法三： $\because \angle ACD$ 与 $\angle AOD$ 为 $\widehat{AD}$ 所对的圆周角和圆心角，

$$\therefore \angle AOD = 2\angle ACD .$$

$$\because \angle ACD = 30^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOD = 2 \times 30^\circ = 60^\circ .$$

$$\because OA = OD ,$$

$\therefore \triangle OAD$ 为等腰三角形 .

$$\because \angle AOD = 60^\circ ,$$

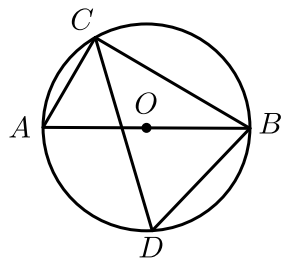
$\therefore \triangle OAD$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle BAD = 60^\circ .$$

故选：C .

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

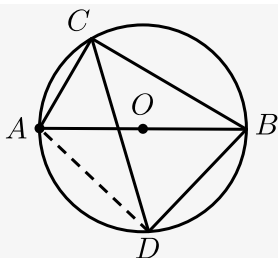
14. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle ACB$ 的角平分线交 $\odot O$ 于 D . 若 $AC = 6$ ， $BD = 5\sqrt{2}$ ，则 BC 的长为 _____ .



【备注】由 $\angle ACB$ 的角平分线可得到 45° ，寻找等腰直角三角形求解

【答案】 8

【解析】连接 BD ，



$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径.

$\therefore \angle ACB$ 的角平分线交 $\odot O$ 于 D ,

$$\therefore \angle ACD = \angle BCD = 45^\circ,$$

$$\therefore AD = BD = 5\sqrt{2}.$$

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \triangle ABD$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2} = 10.$$

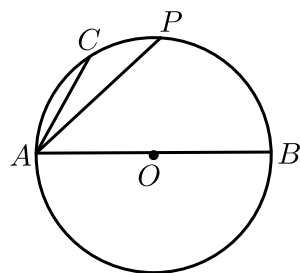
$$\therefore AC = 6,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

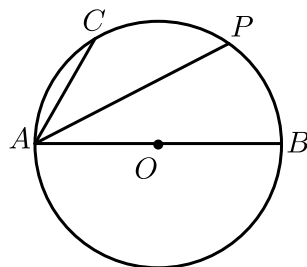
【标注】【知识点】圆与勾股

15. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 、 P 是 $\widehat{AB}$ 上两点, $AB = 13$, $AC = 5$.

(1) 如图, 若点 P 是 $\widehat{AB}$ 的中点, 求 PA 的长.



(2) 如图, 若点 P 是 $\widehat{BC}$ 的中点, 求 PA 的长.



【备注】(1) 直径所对的圆心角为 180° , 由 P 为 $\widehat{AB}$ 的中点可得 $\triangle APB$ 为等腰直角三角形

(2) 见到直径构造直角, 连接 BP , BC , 然后利用垂径定理求解

【答案】 (1) $PA = \frac{13\sqrt{2}}{2}$.

(2) $PA = 3\sqrt{13}$.

【解析】 (1) 如图, 连接 PB ,

$\because P$ 为 $\widehat{AB}$ 的中点,

$\therefore AP = PB$.

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle APB = 90^\circ$,

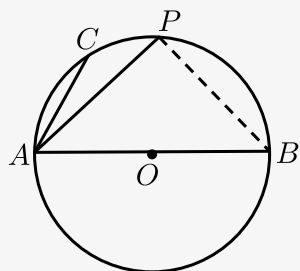
$\therefore \triangle PAB$ 为等腰直角三角形.

在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中,

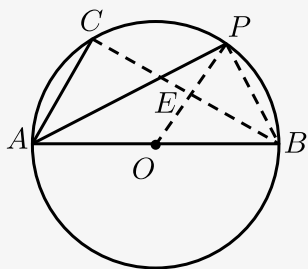
根据勾股定理, 可得 $AP^2 + PB^2 = AB^2$,

$$2AP^2 = 13^2,$$

$$\therefore PA = \frac{13\sqrt{2}}{2}.$$



(2) 方法一: 如图所示, 连接 CB 、 PO 交于点 E , 连接 PB .



$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$, $\angle APB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 、 $\triangle APB$ 是直角三角形.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理得: $CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$,

$\because$ 点 P 是 $\widehat{BC}$ 的中点,

$\therefore \angle BAP = \angle CAP$

$\because \angle BOP = 2\angle BAP$,

$\therefore \angle BOP = \angle BAP + \angle PAC = \angle BAC$.

$$\because \angle OBE = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle BOE \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{OE}{AC} = \frac{BO}{BA} = \frac{1}{2},$$

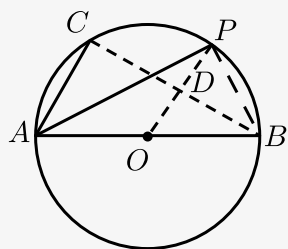
$$\therefore BE = 6, OE = \frac{5}{2}, \angle BEO = \angle BCA = 90^\circ$$

$$\therefore PE = OP - OE = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4,$$

$$\text{在Rt}\triangle PEB\text{中}, PB = \sqrt{PE^2 + BE^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13},$$

$$\text{在Rt}\triangle APB\text{中}, PA = \sqrt{AB^2 - PB^2} = 3\sqrt{13}.$$

方法二：如图，连接 PB ， BC ，连接 OP 交 BC 于点 D 。



$\because P$ 是 $\widehat{BC}$ 的中点，

$\therefore OP \perp BC, BD = CD.$

$\because OA = OB,$

$$\therefore OD = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}.$$

$$\therefore OP = \frac{1}{2}AB = \frac{13}{2},$$

$$\therefore PD = OP - OD = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4.$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ.$$

$$\because AB = 13, AC = 5,$$

$$\therefore BC = 12,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = 6,$$

$$\therefore PB = \sqrt{PD^2 + BD^2} = 2\sqrt{13}.$$

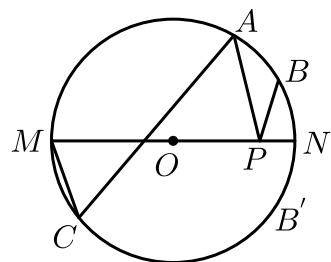
$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle APB = 90^\circ,$$

$$\therefore PA = \sqrt{AB^2 - PB^2} = 3\sqrt{13}.$$

【标注】【知识点】圆与相似

16. 如图, MN 是 $\odot O$ 的直径, A 、 B 、 C 是 $\odot O$ 上的三点, $\angle ACM = 60^\circ$, B 点是 $\widehat{AN}$ 的中点, P 点是 MN 上一动点, 若 $\odot O$ 的半径为 1, 则 $PA + PB$ 的最小值为 ().

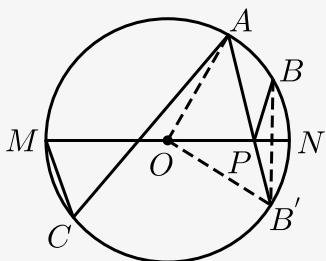


- A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3} - 1$

【备注】 作点 A 或 B 的对称点, 然后连线, 利用特殊直角三角形求解

【答案】 C

【解析】 如图,



过点 B 作关于 MN 的对称点 B' , 连接 AB' 交 MN 于点 P , $PA + PB$ 此时最小.

连接 AO 、 $B'O$.

$$\because \angle ACM = 60^\circ,$$

$$\therefore \widehat{AM} \text{ 的度数为 } 120^\circ,$$

$$\therefore \widehat{AN} \text{ 的度数为 } 60^\circ,$$

$$\therefore \widehat{B'N} \text{ 的度数为 } 30^\circ,$$

$$\therefore \widehat{AB'} \text{ 的度数为 } 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB' = 90^\circ,$$

$$\because AO = B'O = 1,$$

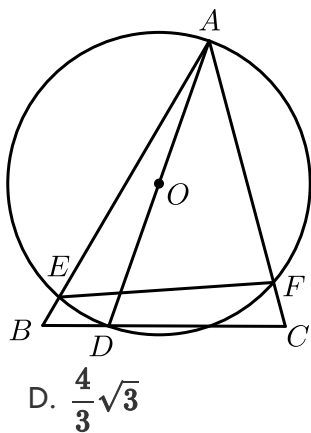
$$\therefore AB' = \sqrt{2},$$

$$\therefore (PA + PB)_{\min} = \sqrt{2}.$$

故选 C.

【标注】 【知识点】圆与最值问题

17. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 60^\circ$, $\angle ACB = 75^\circ$, 点 D 是 BC 边上一个动点, 以 AD 为直径作 $\odot O$, 分别交 AB 、 AC 于点 E 、 F , 若弦 EF 长度的最小值为1, 则 AB 的长为() .



- A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ C. 1.5

D. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

【备注】 易得 $\angle EOF = 90^\circ$, $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}EO$, EF 最小即 EO 最小, 即 AD 最小, 当 $AD \perp BC$ 时, $AD = \sqrt{2}$, 在 $\triangle ADB$ 中利用特殊角求解

【答案】 B

【解析】 $\because \angle B = 60^\circ$, $\angle ACB = 75^\circ$,

$$\therefore \angle BAC = 45^\circ .$$

$$\therefore \angle EOF = 2\angle BAC = 90^\circ .$$

$$\therefore OE = OF ,$$

$\therefore \triangle EOF$ 是等腰直角三角形 .

$$\therefore EF = \sqrt{2}OE = \sqrt{2}R = 1 .$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{2}}{2} . AD = 2R = \sqrt{2} .$$

当 EF 长度最小时, R 最小,

$\therefore$ 直径 AD 最小 .

显然当 $AD \perp BC$ 时 AD 最小 . 此时 $\frac{AD}{AB} = \sin B = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

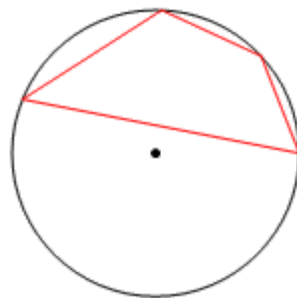
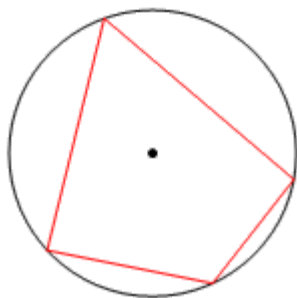
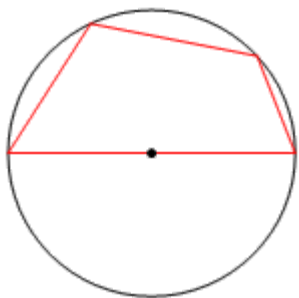
$$\therefore AB = \frac{2\sqrt{6}}{3} .$$

【标注】【知识点】圆中最值

三、 圆内接四边形

1、**圆内接四边形**：四个顶点都在 圆上 的四边形叫做圆的内接四边形 .

常见的圆内接四边形：



2、圆内接四边形的性质：圆的内接四边形的 对角互补 。

证明：

根据圆周角定理可知

$$\angle 3 = 2\angle 1, \angle 2 = 2\angle 4,$$

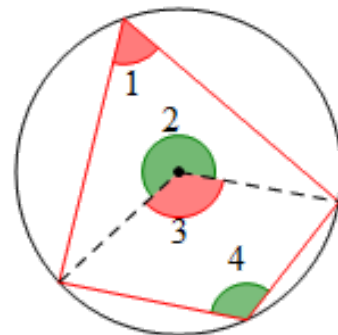
$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ,$$

$$\therefore 2\angle 1 + 2\angle 4 = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ.$$

同理可证四边形的另一组对角的和也为 180° 。

所以圆内接四边形对角互补。

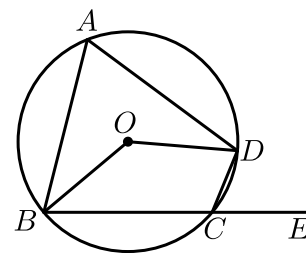


【备注】 确定是不是圆内接四边形，一定要看四边形的四个顶点是不是都在圆周上。

🍌 举个“栗”子

栗子9

18. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，如果它的一个外角 $\angle DCE = 64^\circ$ ，那么 $\angle BOD = ()$ 。



A. 128°

B. 100°

C. 64°

D. 32°

【备注】 四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形

【答案】 A

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，

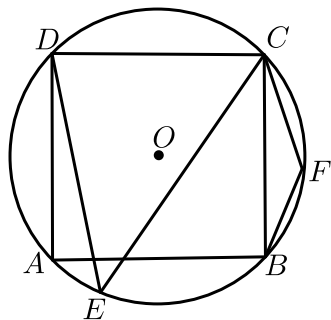
$$\therefore \angle A = \angle DCE = 64^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = 2\angle A = 128^\circ.$$

故选A .

【标注】【知识点】圆内接四边形综合

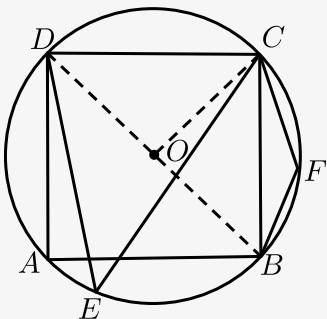
19. 正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 则 $\angle E = \underline{\hspace{1cm}}$, $\angle F = \underline{\hspace{1cm}}$.



【备注】连接 BD 可得四边形 $BFCD$ 为圆内接四边形

【答案】 45° ; 135°

【解析】连 OC 、 BD ,



$$\angle E = \frac{1}{2} \angle COD = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ ,$$

四边形 $BFCD$ 内接于 $\odot O$,

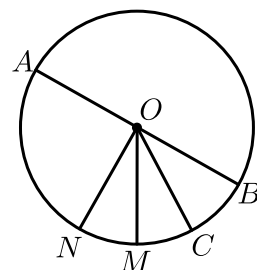
$$\therefore \angle F = 180^\circ - \angle BDC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ .$$

故答案为 : 45° ; 135° .

【标注】【知识点】圆内接四边形综合

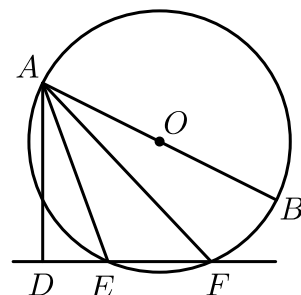
20. 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径 .

(1) 如图① , $\widehat{BC} = \widehat{CM} = \widehat{MN}$, $\angle MON = 35^\circ$, 求 $\angle AON$ 的大小 .



图①

(2) 如图②, E, F 是 $\odot O$ 上的两个点, $AD \perp EF$ 于点 D , 若 $\angle DAE = 20^\circ$, 求 $\angle BAF$ 的大小.



【备注】 (1) 弧等可得圆心角等

(2) 连接 BF 可得四边形 $AEBF$ 为圆内接四边形

【答案】 (1) 75° .

(2) 20° .

【解析】 (1) 在 $\odot O$ 中,

$$\because \widehat{BC} = \widehat{CM} = \widehat{MN},$$

$$\therefore \angle BOC = \angle COM = \angle MON = 35^\circ,$$

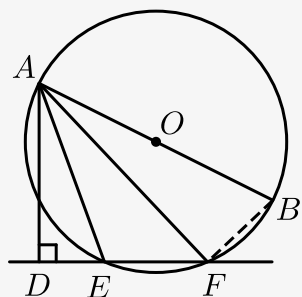
$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore$

$$\angle AON = 180^\circ - \angle BOC - \angle COM - \angle MON = 180^\circ - 35^\circ - 35^\circ - 35^\circ = 75^\circ$$

.

(2) 如图, 连接 BF



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle AFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = 90^\circ - \angle B .$$

$\because \angle AEF$ 为 $\text{Rt}\triangle ADE$ 的一个外角 , $\angle DAE = 20^\circ$,

$$\therefore \angle AEF = \angle ADE + \angle DAE = 90^\circ + 20^\circ = 110^\circ ,$$

在 $\odot O$ 中 , 四边形 $ABFE$ 是圆内接四边形 ,

$$\text{有 } \angle AEF + \angle B = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAF = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ .$$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】圆内接四边形的性质定理